

**ANALISIS KESTABILAN *HELICOVERPA ARMIGERA* (HAMA
PENGGEREK BUAH) DAN *PAEDERUS FUSCIPES SP* (TOMCAT)
DENGAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DAN RESPON FUNGSIONAL
MICHAELIS MENTEN DENGAN METODE BEDA HINGGA MAJU**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh:

Lusiana Dwi Indriastuti

NIM. 09305141005

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2013**

**ANALISIS KESTABILAN *HELICOVERPA ARMIGERA* (HAMA
PENGGEREK BUAH) DAN *PAEDERUS FUSCIPES SP* (TOMCAT)
DENGAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DAN RESPON FUNGSIONAL
MICHAELIS MENTEN DENGAN METODE BEDA HINGGA MAJU**

**Oleh:
Lusiana Dwi Indriastuti
NIM. 09305141005**

ABSTRAK

Ketidakseimbangan ekosistem terjadi apabila semua komponen biotik maupun abiotik tidak berada pada porsi yang seharusnya baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan. Salah satu contoh ketidakseimbangan ekosistem yang disebabkan oleh rantai makanan yang bermasalah adalah kasus serangan tomat (*Paederus Fuscipes Sp*) di Surabaya. Tugas akhir skripsi ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan populasi tomat dan hama penggerek buah model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten di sekitar titik kesetimbangan. Kestabilan populasi tomat dan hama penggerek buah akan dianalisis dengan metode beda hingga maju (*forward difference method*).

Analisis kestabilan populasi tomat dan hama penggerek buah model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten dengan metode beda hingga maju dilakukan dengan cara mencari titik kesetimbangan populasi tomat dan hama penggerek buah model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten, membentuk skema eksplisit metode beda hingga maju dan menganalisis kestabilan skema eksplisit metode beda hingga maju untuk model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten menggunakan Program *Matlab 7*. Variable-variabel penyusun model pada skripsi ini yaitu: jumlah populasi hama penggerek buah (M), jumlah populasi tomat (P), angka kelahiran (α), angka kematian (β), jumlah kepadatan tomat (g), konstanta kesebandingan (h), populasi maksimum hama penggerek buah (K), angka perkembangbiakan tumbuhan (z)

Kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomat di titik kesetimbangan $E_2 = (K, 0)$ dicapai saat $K < \frac{\beta z}{(\mu - \beta)}$, sedangkan kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomat di titik kesetimbangan $E_3 = (\bar{M}, \bar{P})$, dengan $\bar{M} > 0, \bar{P} > 0$ dicapai pada interval $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{(\mu - \beta)}$.

Kata kunci: Mangsa-pemangsa, respon fungsional Michaelis Menten, metode beda hingga maju, titik kesetimbangan, kestabilan.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Ekosistem merupakan hubungan timbal balik suatu komunitas dengan lingkungan fisiknya sehingga ekosistem meliputi komponen biotik dan abiotik yang terdapat di satu area (Hartanto, 2004:135). Ekosistem berada pada kondisi seimbang jika rantai makanan dalam pembentukan suatu ekosistem berada dalam kondisi seimbang, dimana semua komponen baik biotik maupun abiotik berada pada porsi yang seharusnya, baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan. Ketidakseimbangan ekosistem terjadi apabila semua komponen biotik maupun abiotik tidak berada pada porsi yang seharusnya baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan. Salah satu contoh ketidakseimbangan ekosistem yang disebabkan oleh rantai makanan yang bermasalah adalah kasus serangan tomcat (*Paederus Fuscipes Sp*) di Surabaya pada 13 Maret 2012 (Heru Ruslan, 2012). Serangga ini mengeluarkan cairan racun bernama *paederin*. *Paederin* adalah *hemolimfa* (darah serangga) *tomcat* (Dianing Sari, 2012). *Paederin* juga bisa bertahan lama di baju atau selimut yang terkena *tomcat*. Jadi meski tidak menempel di tubuh, racun bisa membuat gatal dari kain yang terkena *paederin*.

Tomcat (*Paederus Fuscipes sp*) termasuk dalam Familia Staphylinidae, ordo Coleoptera. Serangga Tomcat berkembang biak di tanah dan menyukai tempat yang lembab. Mangsa utama dari tomcat adalah hama penggerek buah (*Helicoverpa Armigera*).

Hama penggerek buah (*Helicoverpa Armigera*) merupakan musuh para petani. Hama ini terdapat pada tanaman kedelai, kapas, tomat, dan cabai. Pada tanaman kapas, hama ini akan menyerang kuncup bunga, bunga, dan buah kapas sehingga menyebabkan badan buah kapas tidak dapat berkembang atau gugur (Nurindah, 2001:60). Pengalihan fungsi lahan pertanian menjadi bangunan perumahan menyebabkan berkurangnya populasi hama penggerek buah. Kondisi ini menyebabkan kumbang tomcat mencari makanan di tempat lain.

Pembangunan perumahan pada lahan pertanian berdampak pada berkurangnya lahan pertanian, sehingga tempat bagi hama penggerek buah menjadi berkurang. Hal ini menyebabkan kurangnya ketersediaan makanan bagi kumbang tomcat. Kondisi tidak terpenuhinya makanan bagi kumbang tomcat merupakan wujud dari ketidakstabilan ekosistem. Serangan kumbang tomcat yang terjadi di Surabaya mungkin dapat terjadi kembali dikarenakan ketidakstabilan ekosistem. Ekosistem berada pada kondisi tidak stabil jika salah satu komponen pada ekosistem tersebut rusak. Oleh karena itu, untuk menstabilkan populasi tomcat diperlukan beberapa upaya, salah satunya dengan menyetimbangkan populasi hama penggerek buah. Titik kesetimbangan antara kumbang tomcat dan hama penggerek buah dapat dicari dengan model mangsa dan pemangsa dengan tomcat sebagai pemangsa dan hama penggerek buah sebagai mangsa. Titik kesetimbangan model mangsa dan pemangsa diperoleh ketika laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa seimbang.

Kelahiran hama penggerek buah akan menyebabkan bertambahnya persediaan makanan bagi tomcat. Interaksi antara hama penggerek buah dan

tomcat akan menyebabkan kematian hama penggerek buah. Kematian hama penggerek buah akibat interaksi memberikan energi bagi tomcat untuk melakukan perkembangbiakan. Kematian tomcat disebabkan faktor alami, bukan disebabkan oleh hama penggerek buah. Berdasarkan kondisi-kondisi yang tersedia, maka diambil beberapa asumsi yaitu:

1. Laju kelahiran perkapita hama penggerek buah konstan.
2. Laju kematian perkapita tomcat konstan.
3. Laju kematian perkapita hama penggerek buah sebanding dengan tingkat jumlah kepadatan tomcat.
4. Laju kelahiran perkapita tomcat sebanding dengan jumlah hama penggerek buah yang berhasil dimangsa oleh tomcat.

Berdasarkan asumsi yang ada, dimisalkan M menyatakan banyaknya populasi mangsa terhadap waktu, P menyatakan banyaknya populasi pemangsa terhadap waktu dan α menyatakan laju kelahiran perkapita. Berdasarkan asumsi pertama maka laju kelahiran perkapita mangsa adalah αM .

Menurut asumsi kedua laju kematian pemangsa tidak bergantung pada populasi mangsa, misalkan β menyatakan kematian perkapita maka laju kematian perkapita pemangsa dinyatakan oleh βP . Misalkan tingkat kepadatan mangsa dinyatakan oleh g maka menurut asumsi ketiga laju kematian perkapita mangsa dinyatakan oleh gMP . Jika $h > 0$ adalah konstan kesebandingan, sesuai dengan asumsi keempat yaitu laju kelahiran perkapita sebanding dengan populasi mangsa maka laju kelahiran pemangsa dinyatakan oleh $ghMP$.

Banyaknya tumbuhan mempengaruhi jumlah hama penggerek buah yang berhasil ditangkap oleh tomcat. Hal tersebut disebabkan karena tumbuhan sebagai tempat berlindung dari interaksi perburuan antara tomcat dan hama penggerek buah. Angka kematian hama penggerek buah sangat bergantung pada banyak tanaman di habitat tersebut. Respon fungsional Michelis Menten mempengaruhi angka kematian hama penggerek buah akibat interaksi perburuan, sedangkan pada laju populasi tomcat bersifat menambah jumlah populasi tomcat. Hal tersebut disebabkan karena respon fungsional Michaelis Menten mempengaruhi angka kematian hama penggerek buah akibat interaksi perburuan.

Misalkan z menyatakan laju perkembangbiakan tumbuhan dan K menyatakan populasi maksimum hama penggerek buah, maka diperoleh model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten, yaitu $\frac{dM}{dt} = \alpha M \left(1 - \frac{M}{K}\right) - \frac{gMP}{z+M}$ dan $\frac{dP}{dt} = \frac{\mu MP}{z+M} - \beta P$, dengan $\mu = gh$. Model matematis yang muncul pada model mangsa dan pemangsa adalah bentuk persamaan diferensial. Untuk mencari kestabilan populasi dapat menggunakan metode analitik dan metode numerik.

Pada skripsi ini untuk menganalisis kestabilan populasi tomcat dan hama penggerek buah akan digunakan metode numerik. Metode numerik berdasarkan prinsip-prinsip pendekatan (aproksimasi) sehingga solusi yang diperoleh adalah solusi hampiran (solusi pendekatan). Salah satu konsep untuk menyelesaikan persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda

hingga merupakan suatu metode yang digunakan untuk melakukan pendekatan dan estimasi nilai-nilai yang merupakan karakteristik suatu domain (daerah) yang akan diteliti. Kestabilan populasi tomcat dan hama penggerek buah akan dicari dengan menggunakan metode beda hingga, khususnya metode beda hingga maju (*forward difference method*).

B. Batasan Masalah

Pada skripsi ini, analisis dilakukan terhadap satu pemangsa dan satu mangsa, yaitu tomcat sebagai pemangsa dan hama penggerek buah sebagai mangsa. Model yang digunakan adalah model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten, yaitu $\frac{dM}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{M}{K}\right) M - \frac{gMP}{z+M}$ dan $\frac{dP}{dt} = \frac{\mu MP}{z+M} - \beta P$ yang akan dianalisis kestabilannya dengan metode beda hingga maju. Pertambahan populasi akibat migrasi maupun kematian spesies diabaikan.

C. Rumusan Masalah

1. Bagaimana prosedur metode beda hingga dalam analisis kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomcat model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten di sekitar titik kesetimbangan?

2. Bagaimana analisis kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomat model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten di sekitar titik kesetimbangan dengan metode beda hingga maju?

D. Tujuan Penelitian

1. Menjelaskan prosedur metode beda hingga maju dalam menganalisis kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomat model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten di sekitar titik kesetimbangan
2. Menganalisis kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomat model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten di sekitar titik kesetimbangan dengan metode beda hingga maju

E. Manfaat Penelitian

Analisis kestabilan yang diperoleh diharapkan memberi landasan bagi peneliti yang akan meneliti dua spesies yang memiliki hubungan mangsa dan pemangsa dimana laju kematian mangsa dipengaruhi oleh banyaknya tanaman di habitat tersebut.

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang dibentuk dari beberapa persamaan diferensial (Widiarti, 1999:11). Penerapan persamaan diferensial banyak digunakan dalam bidang mekanika, fisika dan rekayasa sebab banyak hukum dan hubungan fisik dalam bentuk persamaan diferensial. Berikut diberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan persamaan diferensial.

Definisi 2.1 (Ross, 1984:3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial menurut variabel bebasnya dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Definisi 2.2 (Ross, 1984:4)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.3 (Ross, 1984:4)

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat turunan-turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan bentuk persamaannya, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial nonlinier.

Definisi 2.4 (Widiarti, 1994: 17)

Persamaan diferensial linier adalah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah bebas dan turunan-turunannya.

Menurut Dr. Sri Rejeki P (2009: 4-5) persamaan diferensial dapat dikatakan linier jika memenuhi syarat sebagai berikut

- a. Variabel terikatnya beserta turunannya paling tinggi berpangkat satu
- b. Tidak terdapat unsur perkalian antara variabel terikat satu dengan lainnya, antara turunan-turunannya, serta turunan dengan variabel terikat.

Apabila suatu persamaan diferensial tidak memenuhi syarat linier maka persamaan diferensial tersebut disebut persamaan diferensial nonlinier.

Contoh:

1. $\frac{dx}{dy} = 2xy + 3y$ (Persamaan Diferensial Nonlinier)

2. $\frac{dx}{dy} = 2x + 3y$ (Persamaan Diferensial Linier)

B. Model Matematika

Penerapan analisis sistem ilmu terapan misalnya biologi, ekonomi, fisika dan lain-lain saat ini semakin meningkat pesat seiring dengan perkembangan pada bidang matematika. Salah satu contohnya yaitu pada bidang biologi, untuk menggambarkan laju pertumbuhan populasi suatu spesies digunakan pemodelan matematika.

Definisi 2.5 (Meyer, 1984:1)

Pemodelan matematika adalah suatu cara untuk mendeskripsikan beberapa fenomena dalam kehidupan nyata dalam istilah matematika (secara matematika).

Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika.

Definisi 2.6 (Ekawati, 2012: 133)

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata.

Menurut Meyer (1984:13) memodelkan suatu objek ke dalam bentuk matematika tidak dapat dilakukan secara langsung. Oleh karena itu terdapat tiga langkah pemodelan matematika yaitu merumuskan masalah, membuat model matematika dan mengevaluasi model.

1. Merumuskan masalah

Pada tahap ini dilakukan pengenalan masalah-masalah yang sebenarnya dan dilakukan penyederhanaan yang meliputi pengabaian faktor-faktor yang kurang relevan dengan masalah. Melalui pembuatan asumsi dan pembuatan model nyata agar diperoleh suatu penghampiran masalah sesungguhnya yang lebih sederhana dan mudah dirumuskan tanpa mengurangi sustansi masalah yang dimodelkan.

2. Membuat model matematika

Pada tahap ini semua peubah dan relasi-relasi yang terdapat dalam rumusan masalah dinyatakan dalam istilah dan pengertian-pengertian matematika yaitu dengan cara membuat suatu peramaan matematika yang sesuai dengan masalah tersebut.

3. Mengevaluasi model

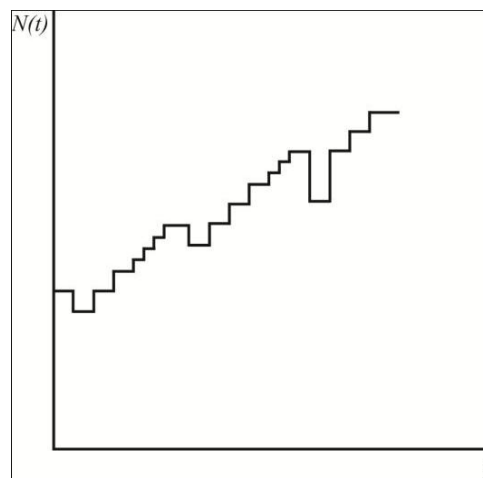
Pada tahap ini model matematika yang telah dibuat ditentukan penyelesaiannya agar dapat dilakukan analisis untuk evaluasi apakah model tersebut telah menjawab pertanyaan secara tepat atau belum serta berisi interpretasi dalam kehidupan nyata.

Model matematika digunakan dalam beberapa bidang ilmu dan studi yang berbeda. Aplikasi model matematika pada bidang-bidang seperti biologi, fisika, kedokteran, teknik, keuangan, permasalahan pada jaringan komputer dan ekonomi.

Contoh model Malthus: $\frac{dN}{dt} = RN$

$\frac{dN}{dt}$ menyatakan pertumbuhan suatu spesies pada waktu t , R menyatakan laju pertumbuhan dan N menyatakan banyaknya populasi suatu spesies.

Pertumbuhan populasi dapat dilihat dengan melakukan pendataan dalam waktu terus menerus. Namun, beberapa populasi biasanya diukur secara berkala. Sebagai contoh, pendataan populasi burung di hutan dilakukan setahun sekali. Walaupun dimodelkan dengan fungsi terus menerus dari waktu ke waktu, namun keterbatasan data menyebabkan data populasi tersebut menunjukkan model yang diskrit. Hal tersebut dinamakan pertumbuhan populasi diskontinu (Haberman, 2012: 120). Misalkan $N(t)$ menyatakan populasi suatu spesies terhadap waktu t , maka gambar untuk merepresentasikan pertumbuhan populasi diskontinu adalah sebagai berikut:

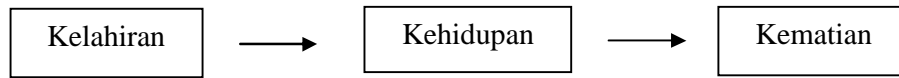


Gambar 2.1 Pertumbuhan Populasi Diskontinu

(Haberman, 1977:121)

Pertumbuhan populasi suatu spesies memiliki beberapa faktor yang mempengaruhi nilainya. Secara garis besar faktor-faktor tersebut adalah nilai

kelahiran dan kematian spesies tersebut. Kelahiran akan meningkatkan nilai pertumbuhan populasi dan kematian akan mengurangi nilai pertumbuhan populasi. Secara umum pertumbuhan populasi suatu spesies dapat direpresentasikan dalam diagram berikut:

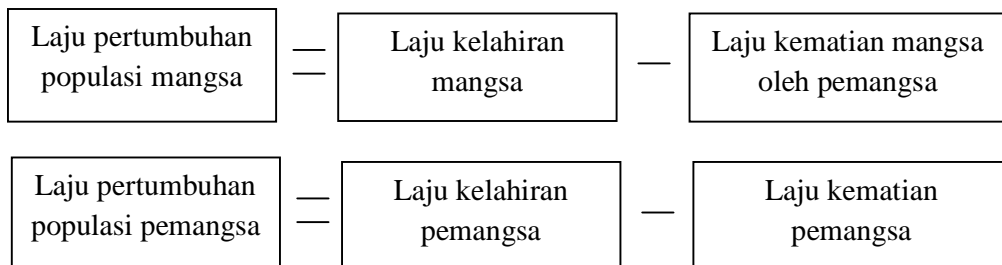


Gambar 2.2. Diagram *Input-output* Pertumbuhan Populasi
(Bernes, 2002: 63)

1. Model Matematika Mangsa dan Pemangsa

Ada beberapa jenis interaksi mangsa dan pemangsa seperti herbivora yang memakan jenis tanaman, karnivora memakan spesies hewan, parasit yang hidup pada atau di spesies lain, dan kanibal yang makan spesies mereka sendiri. Model mangsa dan pemangsa pada skripsi ini berlaku untuk satu spesies pemangsa dan satu spesies mangsa.

Populasi pemangsa yang memangsa satu spesies dan populasi mangsa yang dimangsa secara umum dapat direpresentasi pada diagram berikut



Gambar 2.3 Diagram Laju Pertumbuhan Populasi Mangsa Dan Pemangsa
(Bernes, 2002:121)

Laju pertumbuhan mangsa dipengaruhi oleh laju kelahiran mangsa dan laju kematian mangsa oleh pemangsa. Selisih antara laju kelahiran mangsa dan laju kematian mangsa yang disebabkan oleh pemangsa mengakibatkan perubahan pada laju populasi mangsa.

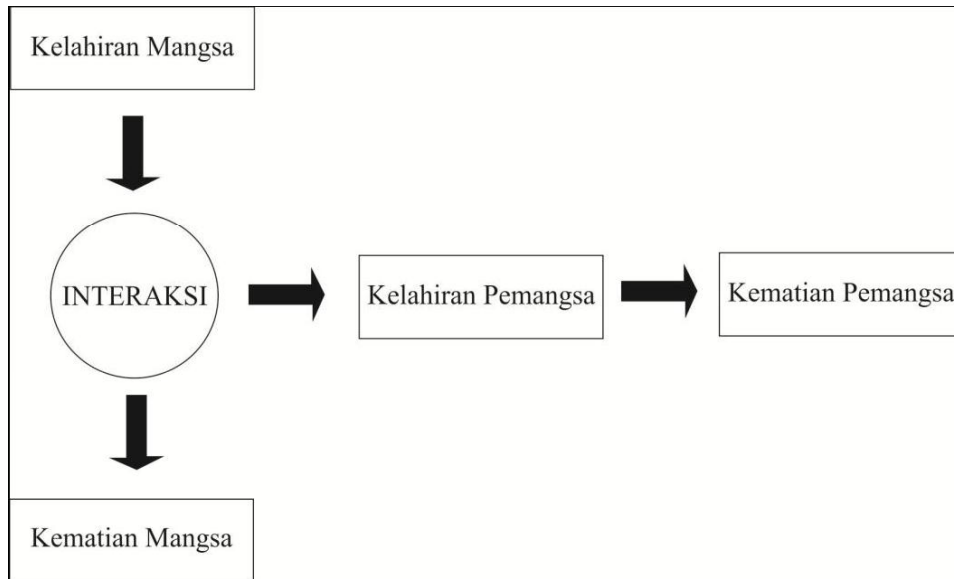
Laju pertumbuhan populasi pemangsa dipengaruhi oleh laju kelahiran pemangsa dan laju kematian pemangsa. Laju kematian pemangsa tidak dipengaruhi oleh mangsa atau lebih tepatnya disebabkan faktor alami, dan selisih antara laju kelahiran pemangsa dan laju kematian pemangsa mengakibatkan perubahan pada laju populasi pemangsa.

Berdasarkan Gambar 2.3 diperoleh beberapa fakta di lapangan yang menghubungkan perilaku mangsa dan pemangsa. Kelahiran mangsa menyebabkan bertambahnya banyaknya makanan bagi pemangsa, hal ini menjadikan tersedianya banyak energi sebagai proses perkembangbiakan pemangsa. Kematian mangsa karena interaksi perburuan sangat dipengaruhi banyaknya pemangsa. Kematian pemangsa pada umumnya disebabkan karena faktor alami dan bukanlah akibat interaksi perburuan. Berdasarkan kondisi-kondisi yang ada, maka dapat diambil beberapa asumsi yaitu

- 1) Laju kelahiran perkapita mangsa konstan
- 2) Laju kematian perkapita pemangsa konstan
- 3) Laju kematian perkapita mangsa sebanding dengan tingkat kepadatan pemangsa.

- 4) Laju kelahiran perkapita pemangsa sebanding dengan jumlah mangsa yang berhasil dimangsa oleh pemangsa

Berdasarkan asumsi-asumsi yang ada maka interaksi antara mangsa dan pemangsa dapat ditunjukkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.4 Diagram Interaksi Mangsa Dan Pemangsa

Kelahiran mangsa menyebabkan bertambahnya persediaan makanan bagi pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa dalam perburuan menyebabkan kematian mangsa. Kematian mangsa akibat interaksi memberikan energi bagi pemangsa untuk melakukan perkembangbiakan. Kematian pemangsa disebabkan faktor alami dan bukan disebabkan oleh mangsa.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang ada, dapat dibentuk beberapa pengandaian dalam bentuk model matematika. Misalkan M menyatakan

banyaknya populasi mangsa terhadap waktu, P menyatakan banyaknya populasi pemangsa terhadap waktu dan b menyatakan laju kelahiran perkapita. Berdasarkan asumsi pertama maka laju kelahiran perkapita mangsa dinyatakan bM .

Menurut asumsi kedua laju kematian pemangsa tidak disebabkan oleh mangsa, andaikan d menyatakan kematian perkapita maka laju kematian perkapita pemangsa dinyatakan oleh dP . Andaikan angka kematian mangsa dinyatakan oleh g maka menurut asumsi ketiga laju kematian perkapita mangsa dinyatakan oleh gMP .

Jika $h > 0$ adalah konstan kesebandingan, sesuai dengan asumsi keempat yaitu laju kelahiran perkapita pemangsa sebanding dengan populasi mangsa maka laju kelahiran pemangsa dinyatakan oleh $ghMP$. Berdasarkan asumsi yang ada maka diperoleh:

$$\frac{dM}{dt} = bM - gMP \quad 2.1a$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu MP - dP \quad 2.1b$$

dimana $\mu = gh$. Model laju pertumbuhan populasi mangsa ditunjukkan oleh Persamaan 2.1a. Model laju pertumbuhan populasi mangsa merupakan selisih antara kelahiran mangsa dengan kematian mangsa akibat interaksi. Persamaan 2.1b merupakan model laju pertumbuhan populasi pemangsa. Model laju pertumbuhan populasi pemangsa merupakan selisih antara kelahiran pemangsa yang disebabkan interaksi dengan kematian pemangsa. Model 2.1a dan Model

2.1b merupakan model Lotka Voltera dengan dua populasi yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa.

C. Titik Keseimbangan

Sistem persamaan diferensial mempunyai sifat-sifat tertentu, misalkan kestabilan. Kestabilan sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan penyelidikan melalui pemberian suatu nilai awal yang terletak pada persekitaran keseimbangan.

Definisi 2.7 (Perko, 2000: 102)

Diberikan Sistem Persamaan Diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik keseimbangan jika $f(\bar{x}) = 0$.

D. Deret Taylor

Definisi 2.8 (Bambang, 1996:7)

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i yaitu

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + f^n(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad 2.2$$

Dari Persamaan 2.2 di atas, R_n merupakan kesalahan pemotongan yang diberikan oleh bentuk berikut

$$R_n = f^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \quad 2.3$$

atau dapat dinyatakan dengan

$$R_n = f^{n+1}(c) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \quad 2.4$$

Indeks n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke- n , sedangkan indeks $n + 1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde $n + 1$.

E. Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang diturunkan berdasarkan deret Taylor.

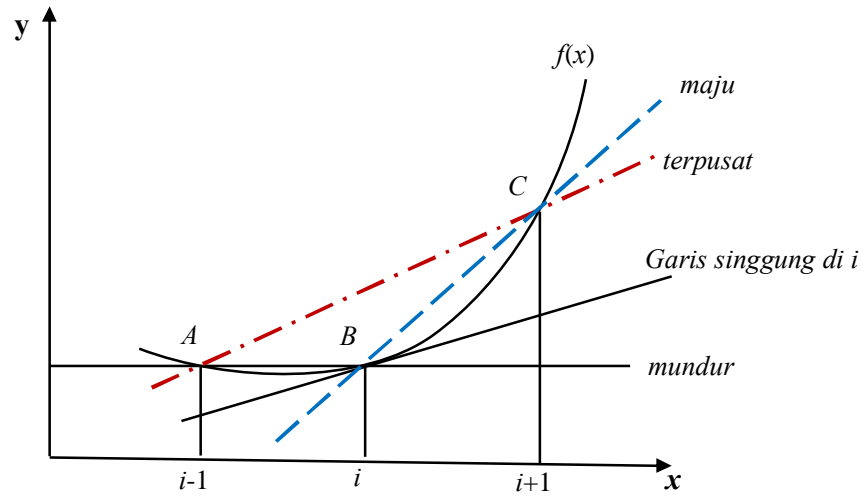
Deret Taylor Persamaan 2.2 dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad 2.5$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad 2.6$$

Diferensial pertama fungsi f terhadap x di titik x_i atau turunan pertama dari f di titik x_i didekati oleh kemiringan garis yang melalui titik $B(x_i, f(x_i))$ dan titik $C(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$



Gambar 2.5 Perkiraan Garis Singgung Suatu Fungsi

Bentuk diferensial dari Persamaan 2.6 disebut diferensial maju orde satu karena menggunakan data pada titik x_i dan x_{i+1} untuk memperhitungkan diferensial (Bambang, 1996:10). Suatu fungsi f yang mempunyai variabel bebas t maka diferensial maju orde satu dapat ditulis

$$f'(t_i) \approx \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{\Delta t} \quad 2.7$$

F. Skema Eksplisit Metode Beda Hingga Maju

Pada skema eksplisit, variabel waktu $t + 1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu t yang sudah diketahui. Fungsi $f(t)$ dan turunannya dalam waktu didekati oleh bentuk berikut

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{f_{t+1} - f_t}{\Delta t}$$

G. Kestabilan

Suatu penyelesaian dari model matematika yang dibentuk diharapkan berada pada kondisi stabil. Berikut ini diberikan definisi titik kesetimbangan stabil, tidak stabil dan stabil asimtotik yaitu:

Definisi 2.9 (Finzio dan Ladas, 1988: 291)

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(\bar{x}_1(0) - \bar{x}_1)]^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2 < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

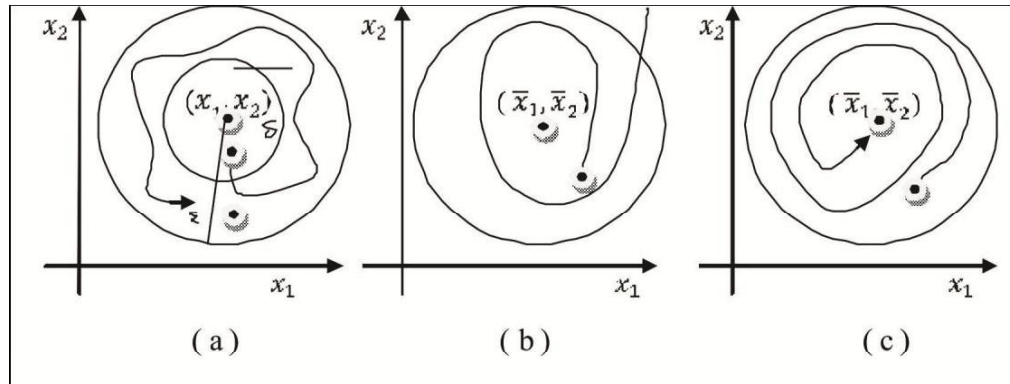
Definisi 2.10 (Finzio dan Ladas, 1988: 291)

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan tidak stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(\bar{x}_1(0) - \bar{x}_1)]^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2 < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 > \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 2.11 (Finzio dan Ladas, 1988: 291)

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan stabil asimtotik jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(\bar{x}_1(0) - \bar{x}_1)]^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2 < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 = \bar{x}$ untuk semua $t \geq 0$.

Berikut ini diberikan gambar konsep titik kesetimbangan stabil, tidak stabil dan stabil asimtotik.



Gambar 2.6 (a) Titik kesetimbangan stabil, (b) titik kesetimbangan tidak stabil, dan (c) titik kesetimbangan stabil asimtotik (Finzio dan Ladas, 1988: 291).